12 - Дәріс

Тақырыбы: **Абсолютті және шартты жинақталатын қатарлар. Абель теңсіздігі. Дирихле белгісі. Абель белгісі.**

Абсолютті және шартты жинақталатын қатарлар.

Егер қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан түзілген

$$\sum_{k=1}^{\infty}|U_k| \qquad (2)$$

қатары жинақты болса, онда сандық қатар

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_k \qquad (1)$$

абсолютті жинақталатын қатар деп аталады. Егер (1) өзі жинақты да, ал оның мүшелерінің модульдерінен түзілген қатар(38) жинақсыз болса, онда сандық қатар (1) шартты жинақталатын қатар деп аталады.

1-Теорема. Егер (2) қатар жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты.

Дәлелдеу. $\sum_{k=1}^{\infty}|U_k|$ жинақты қатары үшін Коши критерийі орындалады: кез келген ε>0 саны үшін N нөмірі табылып, барлық n>N және кез келген p натурал саны үшін

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|U_k|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Сонда n>N және бүтін p≥1 үшін $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}U_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}|U_k|<\varepsilon$ екені айқын, яғни $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ қатары үшін де Коши критерийі орындалған, демек, $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ қатары да жинақты. Теорема дәлелденді.

2-Теорема. Абсолют жинақты қатардың мүшелерінің орындарын ауыстырудан пайда болған қатар абсолют жинақты және олардың қосындылары тең.

Дәлелдеу. Айталық $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ қатары абсолют жинақты, ал $\sum_{j=1}^{\infty}U_j{}'$ осы қатардың мүшелерінің орындарын ауыстырудан пайда болған қатар болсын. Ал $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ қатарының қосындысын S арқылы белгілейік, яғни

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}U_k \qquad (3)$$

Алдымен $\sum_{j=1}^{\infty}U_j{}'$ қатарының жинақты және қосындысы S болатынын көрсетейік. Ол үшін $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ қатарының дербес қосындыларын S_n, ал $\sum_{j=1}^{\infty}U_j{}'$ қатарының дербес қосындыларын $S_j{}'$ және $\hat{S}=\sum_{k=1}^{\infty}|U_k|$, $\hat{S}_n=\sum_{k=1}^{n}|U_k|$, n=1,2,..., деп белгілейік. Теорема шарты бойынша $\sum_{k=1}^{\infty}|U_k|$ қатары жинақты болғандықтан, кез келген ε>0 саны үшін N нөмірі табылып

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|U_n| = \hat{S}- \hat{S}_n<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

демек,

$$|S-S_N|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}U_n\right|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}|U_n|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

Енді $\sum_{j=1}^{\infty}U_j'$ қатарының S_M' дербес қосындысын $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ қатарының S_N дербес қосындысына енетін барлық мүшелерін қамтитындай етіп M нөмірін таңдап аламыз. Айталық, j>M және $S_j''=S_j'-S_N$ болсын. Онда $|S_j''|$ шамасы S_j'' қосындысына енетін қосылғыштар абсолют шамасынан аспайды және бұл қосылғыштар нөмірлері N нөмірінен артық болғандықтан олардың бәрі де $\sum_{n=N+1}^{\infty}|U_n|$ қосындысының ішінде, демек, (4) бойынша,

$$|S_j''|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}|U_n|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

Егер j>M болса, онда (5), (6) бойынша

$$|S-S_j'|=|S-(S_N+S_j'')|\leq|S-S_N|+|S_j''|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Бұл $\sum_{j=1}^{\infty}U_j'=S$ екенін көрсетеді.Енді $\sum_{j=1}^{\infty}U_j'$ қатарының абсолют жинақты екенін көрсету қалды. Ал бұл дәлелденген тұжырымды $\sum_{k=1}^{\infty}|U_k|$ қатарына қолданудан шыға келеді. Шынында да, мұның абсолют жинақты екені белгілі, демек, оны мүшелері теріс емес қатар деп қарастыруға болады. Сондықтан, дәлелдеуіміз бойынша, $\sum_{j=1}^{\infty}\left|U_j'\right|$ қатары абсолют жинақты және оның қосындысы $\sum_{k=1}^{\infty}|U_k|$ қатарының қосындысына тең. Тікелей Коши критерийінен шығатын екі қасиет келтірейік.

3-Теорема. Егер $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ қатары абсолют жинақты, ал С-кез келген сан болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty}CU_k$ қатары да абсолют жинақты.

Дәлелдеуі. Тікелей Коши критерийінен шығады, өйткені

$$\sum_{k=n}^{n+p}|CU_k|=|C|\sum_{k=n}^{n+p}|U_k|$$

4-Теорема. Егер $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty}V_k$ қатарлары абсолют жинақты болса,онда $\sum_{k=1}^{\infty}(U_k+V_k)$ қатары да абсолют жинақты.

Дәлелдеуі. Коши критерийі мен

$$\sum_{k=n}^{n+p}|U_k+V_k|\leq\sum_{k=n}^{n+p}|U_k|+\sum_{k=n}^{n+p}|V_k|$$

теңсіздігінен шығады.

Енді қатарлар көбейтіндісінің жинақтылығы туралы.

5-Теорема. Егер $\sum_{m=1}^{\infty}U_m$ және $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ қатарлары абсолют жинақты болса, онда бұл қатарлар мүшелерінің U_mV_n көбейтінділерінің кез келген ретте орналасуынан түзілген қатар да абсолют жинақты. Егер осылай түзілген қатар қосындысы S және $\sum_{m=1}^{\infty} U_m$ =S′, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ =S″болса, онда S=S′S″.

Дәлелдеу. Егер қатарлар мүшелерінің көбейтіндісінен кез келген ретте түзілген қатар абсолют жинақты болса, онда 2-теорема бойынша оның абсолют жинақтылығы басқаша ретте түзілген болғанда да сақталады. Теореманы дәлелдеуге ыңғайлы болуы үшін көбейтінді қатардың мүшелерін былай

$$\begin{array}{lllll} U_1V_1 & U_1V_2 & U_1V_3 & \ldots & U_1V_n \ldots \\ U_2V_1 & U_2V_2 & U_2V_3 & \ldots & U_2V_n \ldots \\ - & - & - & - & - \\ U_mV_1 & U_mV_2 & U_mV_3 & \ldots & U_mV_n \ldots \\ - & - & - & - & - \end{array}$$

жазып, көбейтінді қатардың өзін мүшелерінің орналасуын

$$\begin{array}{lllll} 1 & 2 & 5 & 10 & \ldots \\ 4 & 3 & 6 & 11 & \ldots \\ 9 & 8 & 7 & 12 & \ldots \\ 16 & 15 & 14 & 13 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

тәсілі көмегімен түземіз, яғни көбейтінді қатар

$$U_1V_1+U_1V_2+U_2V_2+U_2V_1+U_1V_3+ U_2V_3+ U_3V_3+U_3V_2+U_3V_1+\ldots \qquad (7)$$

түрінде болады.

Алдымен (7) қатардың абсолют жинақты екенін дәлелдейік. Ол үшін

$\hat{S}' = \sum_{m=1}^{\infty}|U_m|$, $\hat{S}'' = \sum_{n=1}^{\infty}|V_n|$, $\hat{S}_n' = \sum_{k=1}^{n}|U_k|$, $\hat{S}_n'' = \sum_{k=1}^{n}|V_k|$ $\hat{S}_n = |U_1V_1| + |U_1V_2| + \ldots$

белгілеулерін енгізейік. Онда

$\hat{S}_1 = |U_1V_1| = \hat{S}_1'\hat{S}_1'' \leq \hat{S}'\hat{S}''$,

$\hat{S}_4 = |U_1V_1| + |U_1V_2| + |U_2V_2| + |U_2V_1| = (|U_1| + |U_2|)(|V_1| + |V_2|) = \hat{S}_2'\hat{S}_2'' \leq \hat{S}'\hat{S}''$, …,

$\widehat{S}_{n^2} = |U_1V_1| + \ldots + |U_1V_n| + \ldots + |U_nV_1| + \ldots + |U_nV_n| + \ldots =$

$= (|U_1| + \ldots + |U_n|)(|V_1| + \ldots + |V_n|) = \hat{S}_n'\hat{S}_n'' < \hat{S}'\hat{S}''$,….

және бұл теңсіздіктердің оң жақтарында ақырлы шамалар тұр. Демек, мүшелерінің абсолют шамаларынан түзілген (43) қатардың $\{S_{n^2}\}$ дербес қосындыларының тізбегі өспелі және жоғарыдан шектелген, сондықтан ол жинақты. Бұл (43) қатардың жинақтылығын және оның мүшелерінің орындарын ауыстырудан шыққан кез келген қатардың абсолют жинақты екенін көрсетеді. Сонымен, кез келген

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{m_k} V_{n_k} \qquad (8)$$

қатары абсолют жинақты.

Енді S=S′S″ екенін дәлелдеу үшін (8) қосындысының мүшелерінің орналасу ретінен тәуелсіз екенін көрсетеміз. Ол үшін оның мүшелерінің орналасу ретін тағы да (7) қатардағыдай тәсілмен түземіз де оның дербес қосындысын S_n арқылы және $S_n' = \sum_{k=1}^{n} U_k$, $S_n'' = \sum_{k=1}^{n} V_k$ деп белгілейік. Сонда дәл жоғарыдағыдай

$$S_{n^2} = (U_1+U_2+\ldots+U_n)(V_1+V_2+\ldots+V_n) = S_n'S_n''. \qquad (9)$$

Ал (7) абсолют жинақтылығы дәлелденгендіктен, ол жай жинақты: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Енді (9) теңдікте шекке көшсек $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n' \lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S'S''$.

Шартты жинақталатын қатарлар. Риман теоремасы.

Бізге $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатары берілсін. Өсу ретімен оның теріс емес мүшелерін $U_1^+, U_2^+, \ldots, U_n^+, \ldots,$ ал теріс мүшелерін $-U_1^-, -U_2^-, \ldots, -U_n^-, \ldots$ арқылы белгілеп, мүшелері теріс емес $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^-$ қатарларын қарастырайық.

Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^+$ немесе $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^-$ қатарларының біреуінің нөлден өзгеше мүшелерінің саны ақырлы болса,онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатарының мүшелері белгілі бір нөмірден бастап бір таңбалы болады, сондықтан оның жинақтылығы абсолют жинақтылықпен бара бар.

Сонымен, егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатары жинақты, бірақ абсолютті емес болса, онда $\{U_n^+\}\{U_n^-\}$ жиындары ақырсыз.

1-Теорема. Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатары жинақты, бірақ абсолютті емес болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^-$ қатарлары жинақсыз.

Дәлелдеу. Егер $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$, $\hat{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |U_k|$, $S_n^+ = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k^+$, $S_n^- = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k^-$ деп белгілесек, онда

$\hat{S}_n, S_n^+$, S_n^- қосындылары теріс емес, сондықтан бұл қосындылар тізбектері өспелі, демек, олардың ақырлы немесе ақырсыз шектері бар. S_n , $\hat{S}_n$ қосындыларын $S_n = S_m^+ - S_k^-$, $\hat{S}_n = S_m^+ + S_k^-$, $n=m+k$, түрінде өрнектеуге болады. Мұнда m және k берілген қатар үшін n нөмірінен тәуелді әрі n шексіздікке ұмтылғанда k, m нөмірлері де бірге шексіздікке ұмтылады. Шынында да егер n шексіздікке ұмтылғанда m(n) немесе k(n) нөмірлерінің біреуі шексіздікке ұмтылмаса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ қатарында мүшелер саны ақырлы тек оң немесе теріс мүшелері ғана болады да $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ абсолют жинақты болар еді, ал ол теорема шартына қайшы.

Керісінше, $k\to\infty$, $m\to\infty$ болғанда $n\to\infty$ екені айқын ($n=k+m$). Шарт бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ абсолют жинақты емес, ал бұл $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{S}_n = +\infty$ деген сөз. Сондықтан, $\hat{S}_n = S_m^+ + S_k^-$ бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^-$ шектерінің ең болмағанда біреуі $+\infty$. Ал $S_n = S_m^+ - S_k^-$ теңдігімен $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ақырлылығынан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^-$ шектерінің екіншісіде $+\infty$. Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^-$ қатарлары жинақсыз.

2-Теорема. (Риман теоремасы).Егер $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ қатар жинақты, бірақ абсолютті емес болса, онда қандайда бір А санын алмайық, берілген қатардан мүшелерінің орындарын солай өзгертіп қосындысы А болатын қатар түзуге болады.

Дәлелдеу. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^-$ қатарларын алсақ, 1-теорема бойынша $\sum_{m=1}^{\infty} U_m^+ =+\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} U_k^- =+\infty$.

Айталық анықтылық үшін А≥0 болсын. $\sum_{m=1}^{\infty} U_m^+$ қатарынан қосындысы А-дан үлкен болатындай сонша мүшесін аламыз, мұнда мүшелер санын азайтсақ болғаны ол қосынды А-дан кіші болады. Дәлірек, n санын

$$U_1^+ + U_2^+ + \ldots + U_{n_1}^+ > A \tag{10}$$

және

$$U_1^+ + U_2^+ + \ldots + U_{n_1-1} \leq A \tag{11}$$

орындалатындай етіп таңдаймыз.

Мұндай n табылатыны ((10) орындалсын!) $\sum_{m=1}^{\infty} U_m^+ =+\infty$ шартынан шығады, ал (11) орындалуы үшін n_1-дің ең кішісін аламыз. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^-$ қатарынан алғашқы n_2 мүшесін

$U_1^+ + U_2^+ + \ldots + U_{n_1}^+ - U_1^-, - U_2^- \ldots - U_{n_2}^- < A$ және $U_1^+ + U_2^+ + \ldots + U_{n_1}^+ - U_1^-, - U_2^- - \ldots - U_{n_2-1}^- \geq A$

теңсіздіктері орындалатындай етіп аламыз. Сонан соң тағы да

$U_1^+ + U_2^+ + \ldots + U_{n_1}^+ - U_1^-, - U_2^- \ldots - U_{n_2}^- + U_{n_1+1}^+ + \ldots + U_{n_3}^+ > A$,

$U_1^+ + U_2^+ + \ldots + U_{n_1}^+ - U_1^-, - U_2^- \ldots - U_{n_2}^- + U_{n_1+1}^+ + \ldots + U_{n_3-1}^+ \leq A$

теңсіздіктері орындалатындай етіп $n_3 > n_1+1$ санын таңдап аламыз. Осы процессті жалғастыра берсек дербес қосындылары

$S_{n_1} \succ A$, $S_{n_1+n_2} \prec A$, $S_{n_2+n_3} \succ A$,...

теңсіздіктерін қанағаттандырады және әрбір $S_{n_k+n_{k+1}}$ дербес қосындының А санынан ауыстыруы оның соңғы $U_{n_{k+1}}^+$ мүшесінен санайды.

$$|A - S_{n_k+n_{k+1}}| \leq U_{n_{k+1}}^+ \tag{12}$$

Ал $\lim_{n\to\infty} U_n=0$ және k шексіздікке ұмтылғанда $U_{n_{k+1}}^+$ мүшесінің нөмірі де шексіздікке ұмтылады, сондықтан $\lim_{k\to\infty} U_{n_{k+1}}^+ =0$. Демек (12) теңсіздіктен

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k+n_{k+1}} = A \tag{13}$$

Енді кез келген дербес S_n қосындысы үшін k=k(n) нөмірі табылып,

$$S_{n_k+n_{k+1}} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}+n_{k+2}} \quad \text{немесе} \quad S_{n_k+n_{k+1}} \geq S_n \geq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$$

теңсіздіктерінің біреуі орындалады, сонда (13) теңдіктен

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A$$

шығады.

Абель теңсіздігі және түрлендіруі.

1-Теорема. Егер

$$U_i \geq U_{i+1} \ , i = 1,2,...,n-1 \tag{14}$$

немесе

$$U_i \leq U_{i+1} \ , \quad i = 1,2,...,n-1 \tag{15}$$

және

$$|V_1 + V_2 + ... + V_i| \leq K \quad , \quad i = 1,2,...,n \tag{16}$$

болса, онда Абель теңсіздігі деп аталатын

$$\left|\sum_{i=1}^{n} U_i V_i\right| \leq K\left(|U_1| + \alpha |U_n|\right) \tag{17}$$

теңсіздік орынды.

Дәлелдеу. Алдымен S=$U_1V_1 + U_2V_2 + ... + U_nV_n$ (U_i, V_i , $i = 1,2,..,n$ кез келген сандар) түріндегі қосындының бір түрлендіруін келтірейік. Егер $B_1 = V_1$, $B_2 = V_1 + V_2$,..., $B_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$ десек, онда $V_1 = B_1$, $V_2 = B_2 - B_1$,..., $V_n = B_n - B_{n-1}$ және $S = U_1 B_1 + U_2 (B_2 - B_1) + ... + U_n (B_n - B_{n-1})$. Енді жақшаларды ашып, басқаша жинақтап Абель түрлендіруі деп аталатын $S = (U_1 - U_2)B_1 + (U_2 - U_3)B_2 + ... + (U_{n-1} - U_n)B_{n-1} + U_n B_n$ түрлендіруін аламыз, яғни

$$\sum_{i=1}^{n} U_i V_i = \sum_{i=1}^{n-1} (U_i - U_{i+1})B_i + U_n B_n \tag{18}$$

Сонда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} U_i V_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |U_i - U_{i+1}||B_i| + |U_n||B_n| \leq K\left[\sum_{i=1}^{n-1} (U_i - U_{i+1}) + |U_n|\right] = K\left[|U_1 - U_n| + |U_n|\right] \leq K\left[|U_1| + 2|U_n|\right]$$

Ескерту. Абель теңсіздігіндегі бағалау қосылғыштар санынан тәуелсіз, тек бірінші және соңғы қосылғыштар арқылы беріледі.

Сандық қатар жинақтылығының Дирихле белгісі.

1-Теорема. Егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n V_n \tag{19}$$

қатарында $\{U_n\}$ тізбегі нөлге монотонды ұмтылса , ал $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатарының $\{B_n\}$ дербес қосындылар тізбегі шектеулі болса, онда (19) қатар жинақты.

Дәлелдеу. $\{B_n\}$ тізбегінің шектеулігінен M>0 саны табылып, барлық n=1,2,.. үшін $|B_n| \leq M$ теңсіздігі орындалады.

Сонда

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} V_i\right| = \left|B_{n+p} - B_{n-1}\right| \leq \left|B_{n+p}\right| + \left|B_{n-1}\right| \leq 2M \tag{20}$$

$\lim_{n\to\infty} V_n = 0$ шартынан: кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N – нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін

$$|U_n| < \frac{\varepsilon}{6M} \tag{21}$$

теңсіздігі орындалады. Енді $n > N$ үшін $\sum_{i=n}^{n+p} U_i V_i$ қосындысына (20), (21) – теңсіздіктерін ескеріп, (17) Абель теңсіздігін қолдансақ

$\sum_{i=n}^{n+p} U_i V_i \le 2M\left(\left|U_n\right| + 2\left|U_{n+p}\right|\right) < \varepsilon$ теңсіздігін аламыз. Мұнан Коши критерийі бойынша (19) – қатар жинақтылығы шығады.

Мысалы: Лейбниц белгісі осы Дирихле белгісінен туады. Шынында да,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n, \; U_n \ge U_{n+1} > 0, \; \forall n = 1,2,....., \tag{22}$$

қатарында $V_n = (-1)^n$ десек, онда $V_1 + V_2 + ... + V_n, \; n = 1,2,....,$ қатарлары нөлге немесе бірге тең, демек шенеулі, сондықтан Дирихле белгісі бойынша (22) Лейбниц қатары жинақты. Енді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \tag{23}$$

қатары $\alpha-$ ның кез келген мәнінде жинақты екенін көрсетейік.

Алдымен $\alpha \neq 2\pi m$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$, болғанда жинақты екенін көрсетейік:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\cos(k-\frac{1}{2})\alpha - \cos(k+\frac{1}{2})\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

демек, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\alpha\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$. Ал $\{\frac{1}{n}\}$ тізбегі нөлге монотонды ұмтылады, демек, Дирихле белгісі бойынша (23) қатар жинақты.

Енді $\alpha = 2\pi m$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$, болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\alpha$ қосындысының барлық мүшесі нөлге тең, демек, шектеулі. Сондықтан Дирихле белгісі бойынша қатар бұл жағдайда да жинақты. Ал

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} \tag{24}$$

қатары $\alpha \neq 2\pi m$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$, жағдайында жинақты да, ал $\alpha = 2\pi m$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$, жағдайында жинақты емес екенін көрсетейік.

Шынында да $\alpha \neq 2\pi m$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$, болғанда, дәл жоғарыдағыдай $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\alpha\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$ демек, Дирихле белгісі бойынша (24) қатар жинақты. Ал $\alpha = 2\pi m$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$, жағдайында (24) қатар гармониялық қатарға айналады, сондықтан ол жинақты емес.

Сандық қатар жинақтылығының Абель белгісі.

1-Теорема. Егер $\{U_n\}$ тізбегі монотонды және шектеулі, ал $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатары жинақты болса, онда (19) қатар жинақты.

Дәлелдеу. Теорема шартынан M>0 саны табылып, барлық n=1,2,.. үшін $|U_n| \le M$ теңсіздігі орындалатыны айқын. Ал $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатарының жинақтылығынан: ∀ε>0 ∃N∈ N∀n≥N p≥0 $\left(\left|\sum_{k=0}^{p} V_{n+k}\right| \prec \frac{\varepsilon}{3M}\right)$. Сонымен бірге Абель теңсіздігінен

$$| \sum_{k=0}^{p} U_{n+k} V_{n+k} \; | \prec \frac{\varepsilon}{3M} (|U_n| + 2|U_{n+p}|) \le \varepsilon .$$

Сонда, Коши критерийі бойынша, бұдан (19) қатар жинақтылығы шығады.
Мысалы,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n} \tag{25}$$

қатарының жинақтылығын осы Абель белгісі арқылы тексеруге болады. Шынында да $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln n}$ қатары Дирихле белгісі бойынша жинақты, ал $\cos \frac{\pi}{n}$ n=2,3,… тізбегі монотонды және шектеулі, демек, Абель белгісі бойынша (25) қатар жинақты.

Ескерту. Абель белгісін Дирихле белгісінің салдары ретінде де қарауға болады. Шынында да, $\{U_n\}$ тізбегінің монотондығы мен шектеулілігінен U=$\lim_{n\to\infty} U_n$ шегі бар, демек, $W_n=U_n-U$ тізбегі монотонды нөлге ұмтылады. Ал $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатарының дербес қосындылары шегі шектеулі, себебі бұл қатар жинақты. Сондықтан Дирихле белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} W_n V_n$ қатары жинақты. Бірақ $W_nV_n=U_nV_n-UV_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} UV_n = U\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ қатары жинақты. Сонда екі жинақталатын қатар қосындысы ретінде

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n V_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n V_n + U\sum_{n=1}^{\infty} V_n \tag{26}$$

қатары жинақты.